6. Homologiegruppe ト Heegaard Diagramm トノ関係

小松醇郎（阪大理学部）

二次元閉集合体（Mannigfaltigkeit）ノ種数（Geschlecht）ハ Homologiegruppe ガ與ヘラレレバ決定サレル．所ガ三次元閉集合体ノ種数（ソノ Heegaard-Diagramm ノ標準曲面ノ最小種数）ニ就テハ之ヲ決定スベキ何等ノ方法モナイ．Alexander ハ現在ノ Topologie ノ智識デハ殆ンド不可能デアラウト言フ、事実 Heegaard Diagramm ノ標準曲面ノ種数ノ上下ハ何ニ依ッテ影響サレルカト言フ事ガ全ク分ッテ居ナイ．（最近ノ論文 K. Reidemeister:

Heegaarddiagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten, Abh. math. Seminar Hamburgischen Uni. Bd 10,

ヲ見ル機ヲ得ナイノデ此ノ内容ニ就テハ知リマセン）．

今此ノ種数ニ或ル制限ヲ與ヘル所ノ関係ヲ求メル．結果ハ一次元ベッチ数 p^1 トスレバソノ種数 g ハ $g \geqq p^1$．

此ノタメニソレ自身多少ノ興味ガアル所ノ一ツノ定理ヲ証明スル．ソレハ H. Seifert ノ次ノ定理ノ Verschärfung 及ビ Erweiterung．

H. Seifert: Homologiegruppen berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. (Math. Zeit. Bd 35).

境界アル三次元可符号集合体ノ一次元ベッチ数ハ境界ヲナス凡テノ曲面ノ種数ノ和ヨリ小ナラズ．即境界トシテ n 個ノ曲面，ソノ種数ヲ夫々 $h_1, \dots, h_n$ トスレバ

$$p^1 \geqq \sum_{i=1}^{n} h_i.$$

此処デ果シテ $p^1=\sum h_i$ トナル様ナ集合体ガ存在スルカドウカ，存在シタナラバ如何ナルモノデアラウカヲ決定シ次ニ之ヲ $(2n+1)$ 次元ニ擴張スル．

定理1，ユークリッド空間デ n 個ノ，種数夫々 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ ノ曲面デ境セラレル集合体ノ一次元ベッチ数 $p^1=\sum h_i$．

境界ヲナス所ノ曲面ノ相互ノ位置（Lage）ニ関係シナイ所ガ重要．h_i ガ凡テ等シイ二ツノ集合体ハベッチ数ハ等シイガ一般ニ homöomorph デナイ

証明、Mayer, Vietoris ノ定理ヲ使フ．

W. Mayer: Über abstrakte Topologie. (Monatsheft. Math. u. Phys. Bd. 36)

L. Vietoris: Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe. (Monatsheft. Math. u. Phys. Bd 37).

Σ_1, Σ_2 ヲ二ツノ simplizialer Komplexe，Σ_3 ヲソノ Durchschnitt，Σ ヲソノ Vereinigungskomplex トシテ夫々ノ p 次元ノ Homologiengruppe ヲ夫々 $\mathfrak{H}_1^p, \mathfrak{H}_2^p, \mathfrak{H}_3^p, \mathfrak{H}^p$ デ表ス．又 Σ_3 ノ Zyklus デ Σ_1, Σ_2 何レニテモ homolog 0 トナル様ナ $\mathfrak{H}_3^p$ ノ Untergruppe $\mathfrak{J}^p$ トスレバ．

$$(1) \qquad \mathfrak{H}^p = \frac{\mathfrak{H}_1^p \mathfrak{H}_2^p}{\dfrac{\mathfrak{H}_3^p}{\mathfrak{J}^p}} \cdot \mathfrak{J}^{p-1}$$

ユークリッド空間ニ uneigentlicher Punkt 一点ヲ加ヘ三次元球空間 S^3 トシ此ノ中デ種数 h_i ノ曲面ヲ verschlingen シナイ様ニトル．此ノ曲面デ二分サレタ境界アル集合体ハ互ニニ homöomorph デアル．

(H. Seifert: Topologie, S 57)

(1)式ハベッチ数ダケ考ヘレバ

$$h^p = h_1^p + h_2^p - h_3^p + j^p + j^{p-1}$$

境界トシテノ曲面ヲΣ_3，S^3ヲΣニトレバ $\rho=1$ノトキ $h'=0$，

$h_1^1=h_2^1=p^2$，$h_3^1=2h$，$\gamma^1=\gamma^0=0$，直チニ $p^1=h$，$p^2=0$ ヲ得。

次ニ今出来タ種数hノ曲面ノミヲ境界トスル集合体カラ同様ニ出来タ種数h'ノ曲面ヲ境界トスル集合体ト homöomorph ノモノヲ取リ出ス。コレヲΣ_1，残リヲΣ_2，共通ノ Komplex h'ノ種数ノ曲面ヲΣ_3トスレバ

$$h_1 = p^2 + h' - 2h' + 0 + 0.$$

$$\therefore\ p^1 = h + h' \qquad p^2 = 1.$$

$\gamma^1=0$ナルコトハS^3カラΣ_1ヲトリ出スト考ヘレバ Σ_1ノ境界ノ一次元位相合同類群ノ Basis デΣ_1デ homolog 0 ナルモノハ$S^3-\Sigma_1$デハ homolog 0 デナイ。今ノΣ_2ハ$S^3-\Sigma_1$ノ Unterc Menge，故ニマシテΣ_2デ homolog 0 トハナラナイ。

同様ニ続ケテn個ノ境界 h_1，……，h_nトスレバ

$$p^0=1,\quad p^1=\sum h_i,\quad p^2=n-1,\quad p^3=0,$$

$p^2=n-1$ハ Seifert ノ式 $p^1=p^2-(n-1)+\sum h_i$ ヨリ出ル。以上。

茲デ問題ガ生ズルノハ $p^1=\sum h_i$ トナル三次元集合体ハ上ニ得ラレタモノニ限ルカト云フノデアル。是ハ Heegaard Diagramm カラ閉集合体ヲ構成スル問題，Alexander ノ Vermutung 等ノ困難ナ問題ニ歸着スル。

次ニ前ノ Seifert ノ定理ヲ$(2n+1)$次元ニ擴張スル。

定理 2，境界アル$(2n+1)$次元可符号集合体 M_1^{2n+1} ノ一次元ベッチ数 p^1 ハ境界ヲナス凡テノ $2n$ 次元閉集合体ノ一次元ベッチ数 p_i^1 トスルトキ

$$p^1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} p_i^1,$$

証明. M_1^{2n+1} ト homöomorph ナ集合体 M_2^{2n+1} ヲトリ境界デ対應スル点ヲ等シイト考ヘルト閉集合体 M^{2n+1} ガ生ズル、Verdoppelung.
ソノ時、Euler-Poincaré'sche Charakteristik ヲ作ルト

$$2\chi(M_1^{2n+1}) - \chi\,\mathrm{Rd}(M_1^{2n+1}) = \chi(M^{2n+1}) = 0,$$

$$p^0 - p^1 + p^2 - p^3 + \cdots - p^{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \chi_i$$

茲ニ n ハ Rand ノ数, χ_i ハ Rand ノ Charakteristik. $p^{2n} \geqq n-1$,

(2) $$p^1 - n + (-p^2 + p^3 - \cdots + p^{2n-1}) \geqq -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \chi_i.$$

ココマデハ Seifert ノ方法ソノママ。

今 M^{2n+1} ニテ (1) ヲ応用スル。M^{2n+1} ノ Betti'sche Zahl q^ρ トスレバ

$$\begin{array}{l|l}
(-1)^3 & q^2 = 2p^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \gamma^2 + \gamma^1 \\
(-1)^4 & q^3 = 2p^3 - \sum p_i^3 + \gamma^3 + \gamma^2 \\
\vdots & \cdots\cdots \\
(-1)^{2n} & q^{2n-1} = 2p^{2n-1} - \sum p_i^{2n-1} + \gamma^{2n-1} + \gamma^{2n-2}
\end{array}$$

Poincaré-Veblen ノ Dualitätssatz ヲ使フ事ニヨッテ.

$$0 = 2(-p^2 + p^3 - \cdots + p^{2n-1}) + \gamma^{2n-1} - \gamma^1 + \sum \chi_i - \sum p_i^0 - \sum p_i^{2n} + \sum p_i^1$$

(3) $$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^1 - n + (-p^2 + p^3 - \cdots + p^{2n-1}) + \gamma^{2n-1} - \gamma^1 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \chi_i$$

(2), (3) ヨリ $$p_1 - \frac{1}{2}\sum p_i^1 - \gamma^{2n-1} + \gamma^1 \geqq 0.$$

此處デ Alexander ノ拡張サレタ Dualitätssatz ヲ用フ。

Pontrjagin: Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze (Math. Ann. Bd. 105, S. 190)

Rand ヲ Komplex K トシ K デ Zyklus, M^{2n+1} デ homolog 0 トナル様ナ群

$\mathfrak{g}$ ，又 mit Division ノソレヲ $\mathfrak{g}^*$ トスレバ

$$\mathfrak{g}^r \longleftrightarrow \mathfrak{g}^{2n-r*} \quad ; \quad \mathfrak{g}^{r*} \longleftrightarrow \mathfrak{g}^{2n-r}$$

M_1^{2n+1} ノ Rand K デアリ M^{2n+1} ハ Verdoppelung デ生ジタノダカラ $p^1 = p^{2n-1}$

$$p_1 \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^1 .$$

以上．

定理 3. 閉三次元集合体 M^3 ノベッチ数 $q^1 = q^2 = a$，トスレバソノ種数 $g \geq a$.

此ノ Heegaard Diagramm ノ種数 g ハ (1) ヨリ

$$q^1 = 2g - 2g + p^1 + p^0$$

$p^0 = 0$，Heegaard Diagramm デ二ツカヘルトキ p^1 ノ最モ大キクナルノハ標準曲面ノ結合レテノ時デアル、ソレ故 $p^1 = a$ ナラバ Heegaard Diagramm ノ種数ハ少クモ a.

此処デ $q^1 = a$ デ $g = a$ デアル称ナ集合体ハ容易ニ作ル事ハ出来ル、故ニ $g \geq a$.

種数 g_1, g_2 ノ二ツノ集合体ヲ一ツノ三次元単体ニテ結合スルトキソノ Summenmannigfaltigkeit ガ如何ニナルカ，$g \geq g_1 + g_2$ デハナイカトモ思フガ是ガ言ヘテモ面白イ結果デアル、又 $(2n+1)$ 次元ノ Heegaard Diagram ニ定理 2 ヲ用ヒ定理 3 ノ称ナモノガ言ヘナイダラウカ、又 nichtorientierbar ノ Heegaard Diagramm ニ對シテハ如何ニナルカ．

（七月十四日）